

Exponenciálne rovnice

Rovnaký základ, substitúcia a logaritmovanie

Tri metódy riešenia

Keď sa rovnaký základ nedá dosiahnuť priamo, máme ďalšie dve možnosti. Podľa tvaru rovnice si vyberieme jednu z troch metód.

1. **Rovnaký základ** – keď sa obe strany dajú zapísať mocninou toho istého čísla.
2. **Substitúcia** – keď sa v rovnici opakuje ten istý výraz a^x .
3. **Logaritmovanie** – keď základy zjednotiť nemožno.

Metóda substitúcie

Ak sa v rovnici vyskytuje a^x aj a^{2x} , zavedieme novú neznámu $t = a^x$. Rovnica sa zmení na kvadratickú. Kľúčové je, že $a^{2x} = (a^x)^2 = t^2$.

$$t = a^x, \quad t > 0$$

podmienka $t > 0$ vylúči nezmyselné korene

Príklad · $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

Základ zjednotíme: $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$.

Substitúcia $t = 2^x$: $t^2 - 5t + 4 = 0$

Korene: $t = 1$ a $t = 4$ (oba kladné, takže vyhovujú).

Návrat: $2^x = 1 \rightarrow x = 0$ · $2^x = 4 \rightarrow x = 2$

Riešenia: $x = 0$ a $x = 2$

Metóda logaritmovania

Keď sa základy zjednotiť nedajú, obe strany **zlogaritmujeme**. Využijeme pravidlo, ktoré exponent presunie pred logaritmus.

$$\log a^x = x \cdot \log a$$

Príklad · $3^x = 7$

Zlogaritmujeme obe strany: $\log 3^x = \log 7$

Exponent presunieme dopredu: $x \cdot \log 3 = \log 7$

$$x = \frac{\log 7}{\log 3} \approx 1,771$$

Časté chyby

Zabudnutá podmienka $t > 0$. Ak zo substitúcie vyjde záporný koreň, musíme ho vylúčiť – mocnina nikdy nie je záporná.

Nesprávny prevod základu. Platí $4^x = (2^x)^2$, nie $2^x \cdot 2$.

Návrat k pôvodnej neznámej. Po vyriešení kvadratickej rovnice treba dopočítať x , samotné t nie je odpoveď.

Cvičenia

1. Vyrieš $2^x = 32$

3. Vyrieš $4^x = 8$

5. Vyrieš $5^{2x} = 25$

7. Vyrieš $3^{x-2} = 27$

2. Vyrieš $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

4. Vyrieš $2^x = 5$ (zapíš pomocou logaritmov)

6. Vyrieš $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

8. Vyrieš $7^x = 1$

Výsledky

1. 5 2. $x = 0, x = 1$ 3. $3/2$ 4. $\log 5 / \log 2$ 5. 1 6. $x = 0, x = 1$ 7. 5 8. 0