

Goniometrické rovnice 2

Identita, substitúcia a rozklad na súčin

Zložitejšie goniometrické rovnice

Keď rovnica nie je v základnom tvare, cieľom je **previesť ju na základný**. Pomáhajú nám pritom tri nástroje: základná identita, substitúcia a rozklad na súčin.

Základná goniometrická identita

Najdôležitejší vzťah celej goniometrie. Umožňuje nahradiť kosínus sínusom (alebo naopak), a tým zjednotiť rovnicu na jedinú funkciu.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \cdot \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

Rovnice kvadratické v sínuse alebo kosínuse

Ak sa v rovnici objaví $\sin^2 x$ aj $\sin x$, zavedieme substitúciu **$t = \sin x$** . Dostaneme kvadratickú rovnicu. Pozor na podmienku: hodnoty sínusu aj kosínusu ležia vždy medzi -1 a 1 .

$$t = \sin x, \quad -1 \leq t \leq 1$$

korene mimo tohto intervalu treba vylúčiť

Príklad · $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

Substitúcia $t = \sin x$: $2t^2 - t - 1 = 0$

Korene: $t = 1$ a $t = -1/2$. Oba ležia v intervale od -1 po 1 .

Návrat: $\sin x = 1 \rightarrow x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$

$\sin x = -1/2 \rightarrow x = -30^\circ + k \cdot 360^\circ$ alebo $x = 210^\circ + k \cdot 360^\circ$

Príklad · s využitím identity

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1$$

Nahradíme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 1 \rightarrow 2\cos^2 x = 2$$

$$\cos^2 x = 1 \rightarrow \cos x = \pm 1$$

$$x = k \cdot 180^\circ$$

Rozklad na súčin

Ak sa dá rovnica zapísať ako súčin rovný nule, riešime každý činiteľ zvlášť. Nikdy nedeľme celú rovnicu výrazom so sínusom alebo kosínusom – prišli by sme o riešenia.

Príklad · $\sin x \cdot \cos x = 0$

Súčin je nulový, keď je nulový aspoň jeden činiteľ.

$$\sin x = 0 \rightarrow x = k \cdot 180^\circ$$

$$\cos x = 0 \rightarrow x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$$

Obe skupiny spolu dávajú **$x = k \cdot 90^\circ$** .

Časté chyby

Delenie funkciou. Ak rovnicu vydělíme $\cos x$, stratíme všetky riešenia, kde je $\cos x = 0$. Namiesto delenia rozkladáme na súčin.

Koreň mimo rozsahu. Ak zo substitúcie vyjde $t = 2$, riešenie neexistuje – sínus ani kosínus takú hodnotu nenadobudnú.

Zabudnutý návrat. Po vyriešení kvadratickej rovnice treba z t dopočítať x .

Cvičenia

- | | |
|--|--|
| 1. Vyrieš $\sin^2 x = 1$ | 2. Vyrieš $2\cos^2 x - 1 = 0$ pre $\cos x$ |
| 3. Zjednoduš $1 - \cos^2 x$ | 4. Vyrieš $\sin x \cdot \cos x = 0$ |
| 5. Vyrieš $\sin^2 x + \sin x = 0$ | 6. Zjednoduš $\sin^2 x + \cos^2 x$ |
| 7. Má rovnica $\sin x = 1,5$ riešenie? | 8. Vyrieš $\cos^2 x = 0$ |

Výsledky

1. $x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ 2. $\cos x = \pm \sqrt{2}/2$ 3. $\sin^2 x$ 4. $x = k \cdot 90^\circ$ 5. $x = k \cdot 180^\circ$ alebo $x = -90^\circ + k \cdot 360^\circ$ 6. 1 7. nie 8. $x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$