

# Inverzné funkcie

Prostosť, hľadanie inverznej funkcie a jej graf

## Čo je inverzná funkcia

**Inverzná funkcia** vracia to, čo pôvodná funkcia urobila – je to jej „spätný chod“. Ak  $f$  pošle 2 na 7, potom inverzná funkcia pošle 7 späť na 2. Značíme ju  $f^{-1}$ .

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

zloženie funkcie s jej inverznou dá pôvodné  $x$

## Kedy inverzná funkcia existuje

Iba vtedy, keď je funkcia **prostá** – rôznym vstupom priraduje rôzne výstupy. Inak by sa nedalo jednoznačne vrátiť späť.

### Prečo prostosť rozhoduje

$f(x) = x^2$  prostá nie je:  $f(2) = 4$  aj  $f(-2) = 4$ .

Z hodnoty 4 sa nedá určiť, či sme vyšli z 2 alebo z -2.

Riešenie: obmedzíme definičný obor na  $x \geq 0$ . Potom inverzná funkcia existuje a je to  $\sqrt{x}$ .

## Ako inverznú funkciu nájsť

Postup má tri kroky a funguje vždy rovnako.

1. Predpis zapíšeme ako  $y = f(x)$ .
2. Vymeníme  $x$  a  $y$ .
3. Z rovnice vyjadríme  $y$  – to je  $f^{-1}(x)$ .

### Príklad · $f(x) = 2x + 3$

1.  $y = 2x + 3$

2. Výmena:  $x = 2y + 3$

3. Vyjadríme  $y$ :  $x - 3 = 2y$

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 3}{2}$$

Skúška:  $f(5) = 13$  a  $f^{-1}(13) = (13 - 3)/2 = 5$ .

## Graf a obory

Graf inverznej funkcie je **zrkadlový obraz** pôvodného grafu podľa priamky  $y = x$ . Zároveň si obory vymenia úlohy: definičný obor  $f$  je oborom hodnôt  $f^{-1}$  a naopak.

$$D(f^{-1}) = H(f) \quad \text{a} \quad H(f^{-1}) = D(f)$$

**Časté chyby**

**Zámena s prevrátenou hodnotou.** Zápis  $f^{-1}$  neznamená  $1/f$  – je to inverzná funkcia.

**Vynechaná prostosť.** Bez obmedzenia definičného oboru inverzná funkcia k  $x^2$  neexistuje.

**Zabudnutá výmena.** Krok „vymeníme x a y“ sa nesmie preskočiť.

**Cvičenia**

1. Nájdi inverznú funkciu k  $f(x) = x + 6$
2. Nájdi inverznú funkciu k  $f(x) = 3x$
3. Nájdi inverznú funkciu k  $f(x) = 2x - 8$
4. Nájdi inverznú funkciu k  $f(x) = x/5$
5. Je  $f(x) = x^2$  prostá na všetkých reálnych číslach?
6. Nájdi inverznú funkciu k  $f(x) = 4x + 1$
7. Ak  $f(3) = 10$ , koľko je  $f^{-1}(10)$ ?
8. Podľa ktorej priamky je graf inverznej funkcie súmerný?

**Výsledky**

1.  $x - 6$  2.  $x/3$  3.  $(x + 8)/2$  4.  $5x$  5. nie 6.  $(x - 1)/4$  7. 3 8.  $y = x$